01/04/2015

φυλλάδιο 5

Άσκηση 1

Φανερά, $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ γρ. ανεξ. άρα βάση του V. Εφαρμόζουμε διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ του V

Θέτουμε $h_1 = u_1 = (1,1,0,0)$. Έχουμε $\|h_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = 1^2 + 1^2 = 2$

$\langle u_2, h_1 \rangle = \langle (0,-1,0,2), (1,1,0,0) \rangle$

Θέτουμε $h_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 = (0,-1,0,2) + \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right)$

Έχουμε $\|h_2\|^2 = \langle h_2, h_2 \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{9}{2}$

Θέτουμε $q_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ $q_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Έχουμε q_1, q_2 ορθοκανονική βάση του V. Τώρα επεκτείνουμε q_1, q_2 σε βάση του $\mathbb{R}^4$ (από γρ. Ι) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/6 & -\sqrt{2}/6 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{bmatrix}$

με $a \neq 0$ $\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b' \end{bmatrix}$

$q_1, q_2, e_3 = (0,0,1,0)$ $e_4 = (0,0,0,1)$ βάση του $\mathbb{R}^4$

Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στην q_1, q_2, e_3, e_4. Έχουμε $\langle q_1, e_3 \rangle = 0$ $\langle q_2, e_3 \rangle = 0$. Θέτουμε $h_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle e_3, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2 = e_3$

Έχουμε $\langle e_4, q_1 \rangle = 0$ $\langle e_4, q_2 \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\langle e_4, q_3 \rangle = 0$. Θέτουμε

$h_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle e_4, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2 - \frac{\langle e_4, q_3 \rangle}{\|q_3\|^2} q_3 = (-2/9, 2/9, 0, 1/9)$

Έχουμε $\|h_3\|^2 = \|e_3\|^2 = 1$. $\|h_4\|^2 = 4/9^2 + 4/9^2 + 1/9^2 = 1/9$.
Θέτουμε $q_4 = \frac{h_4}{\|h_4\|} = (-2/3, 2/3, 0, 1/3)$. Τότε έχουμε q_1, q_2, q_3, q_4 ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ που επεκτείνει την ορθ. βάση q_1, q_2 του V

Άσκηση 2

$\mathbb{R}_3[x]$ = πολυώνυμα στο $\mathbb{R}$ βαθμού το πολύ 3
Θέτουμε $g_1 = x$, $g_2 = x^2$, $g_3 = x^3$. Τα g_1, g_2, g_3 είναι γρ. ανεξ. (γιατί $\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3) = 0 \xRightarrow{\text{(μηδενικό πολυώνυμο)}} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Επομένως, g_1, g_2, g_3 βάση του V. Εφαρμόζουμε διαδικασία Gram-Schmidt στην g_1, g_2, g_3.
Θέτουμε $h_1 = g_1$. Έχουμε $\|h_1\|^2 = \int_0^1 g_1(x)^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\langle g_2, h_1 \rangle = \int_0^1 x^2 x \, dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$. Θέτουμε $h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1$

$= x^2 - \frac{3x}{4}$. Θέτουμε $h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\|h_2\|^2} h_2$ (1)

Μετά τις πράξεις $\langle g_3, h_1 \rangle = \frac{1}{5}$, $\langle g_3, h_2 \rangle = \frac{1}{60}$ $\|h_2\|^2 = \frac{1}{80}$
Άρα (1) $\Longrightarrow h_3 = x^3 - \frac{4}{3}\left(x^2 - \frac{3x}{4}\right) = x^3 - \frac{4}{3} x^2 + \frac{2}{5} x$
Έχουμε $\|h_3\| = \int_0^1 h_3^2 dx = 1/175$. Θέτουμε $p_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$, $p_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$, $p_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}$. Τότε p_1, p_2, p_3 ορθ. βάση του V.

<u>Άσκηση 4</u>

Θα δείξουμε V, W ορθοσυμπληρωματικά που απ' τον ορισμό σημαίνει 1) V, W ορθογώνιοι, 2) $\mathbb{R}^4 = V + W$

<u>Ισχυρισμός 1</u>: V, W ορθογώνιοι. Έστω $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ άρα $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Έστω $w \in W$, τότε υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ με $w = (z, z, z, z)$.
Έχουμε $\langle v, w \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (z, z, z, z) \rangle = x_1 z + x_2 z + x_3 z + x_4 z = z(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = z \cdot 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$. Άρα V, W ορθογώνιοι.

<u>Ισχυρισμός 2</u> $\mathbb{R}^4 = V + W$

α' τρόπος: όπως στην γρ. Ι
β' τρόπος: Έστω $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Θέτουμε $f = a + b + c + d$. Τότε $\left(a - \frac{f}{4}, b - \frac{f}{4}, c - \frac{f}{4}, d - \frac{f}{4}\right) + \left(\frac{f}{4}, \frac{f}{4}, \frac{f}{4}, \frac{f}{4}\right)$. Αλλά $\left(a - \frac{f}{4}, b - \frac{f}{4}, c - \frac{f}{4}, d - \frac{f}{4}\right) \in V$ γιατί το [illegible]

Επίσης, $\left(\frac{f}{4},\frac{f}{4},\frac{f}{4},\frac{f}{4}\right)\in W$. Άρα $(a,b,c,d)\in V+W \Rightarrow \mathbb{R}^4 = V+W$

Άσκηση 3

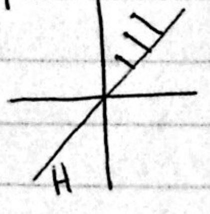
α) Για τον V: $x-y-z=0 \Rightarrow x=y+z$. Άρα $V=\{(y+z,y,z): y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(1,1,0)+z(1,0,1): y,z\in\mathbb{R}\} = \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$. Τα $(1,1,0),(1,0,1)$ γρ. ανεξ. γιατί $\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$. Συνεπώς, ο V έχει βάση $g_1=(1,1,0)$, $g_2=(1,0,1)$.

Εφαρμόζουμε Gram Schmidt στη g_1,g_2 και μετά τις πράξεις βρίσκουμε $q_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)$, $q_2=\left(\frac{\sqrt2}{2\sqrt3},-\frac{\sqrt2}{2\sqrt3},\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)$ ορθοκανονική βάση του V.

Υπολογισμός W: $\begin{cases}x+2y-3z=0\\2x+y-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y=0\\2x+y-3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x\\z=x\end{cases}$

Άρα $W=\{(x,x,x): x\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1,1)\rangle$. Άρα $(1,1,1)$ βάση του W. Ας είναι $h=(1,1,1)$. Έχουμε $\frac{h}{\|h\|}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$ ορθοκανονική βάση του W.

β) Υπενθύμιση. Αν $(Z,\langle,\rangle)$ ~~...~~ χ.ε.γ. πεπερ. διάστασης. H υπόχωρος του Z και $h_1,h_2,\dots,h_q$ ορθοκανονική βάση του H. Η απεικόνιση ορθογώνιας προβολής $\Pi: Z\to H$ ορίζεται από $\Pi(z)=\sum_{i=1}^{p}\langle z,h_i\rangle h_i$



Συνεπώς, αφού q_1,q_2 ορθοκανονική βάση του V, ξέρουμε ότι για $v\in\mathbb{R}^3$ $\pi(v)=\langle v,q_1\rangle q_1+\langle v,q_2\rangle q_2$. Συνεπώς,
$\Pi((1,1,1))=\left\langle(1,1,1),\frac{(1,1,0)}{\sqrt2}\right\rangle q_1+\langle(1,1,1),q_2\rangle q_2=\boxed{\frac{2}{\sqrt2}q_1-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}q_2}$

→ Ασκήσεις εκτός φυλλαδίου

1) Έστω $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ με σύνολο ιδιοτιμών $\{1,5,i,\dots,i+6\}$. Είναι ο A αντιστρέψιμος; Είναι ο $(A+iI_n)$ αντιστρέψιμος;

Λύση: Από θεωρία για $\lambda\in\mathbb{C}$ ιδιοτιμή $A \Leftrightarrow \det(A-\lambda I_n)=0 \Leftrightarrow A-\lambda I_n$ δεν αντιστρέφεται. Άρα αφού 0 όχι ιδιοτιμή του A, έχουμε A αντιστρέψιμος. Αφού $-i$ όχι ιδιοτιμή του A έχουμε $A-(-i)I_n=A+iI_n$ αντιστρέφεται.

2) Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος. Αντιστρέφεται ο $A+\frac{1}{3}I_n$; Αντιστρέφεται ο $A+3I_n$;

Λύση: Αφού A ορθογώνιος απ' τη θεωρία το σύνολο των πραγματικών ιδιοτιμών του είναι ένα απ' τα ακόλουθα: (i) $\varnothing$, (ii) $\{1\}$, (iii) $\{-1\}$, (iv) $\{-1,1\}$

Άρα $-1/3$ όχι ιδιοτιμή του $A \Rightarrow A-(-\frac{1}{3})I_n = A+\frac{1}{3}I_n$ αντιστρέφεται.

Ομοίως, 3 όχι ιδιοτιμή του $A \Rightarrow A+3I_n$ αντιστρέφεται.

3) Στη θεωρία δείξαμε ότι η απεικόνιση $<,>: \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ με $<A,B> = Tr(A^t B)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Είναι η απεικόνιση $<,>': \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$
$<A,B>' = Tr(AB)$ εσωτερικό γινόμενο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι π.χ για $n=2$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ισχύει $A^2 = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow <A,A>' = Tr(\mathbb{O}_{2\times 2})$ άρα $<,>$ όχι θετικά ορισμένο

Για $n=3$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και ισχύουν τα ίδια κλπ.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & \\ & cb+d^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & \\ & b^2+d^2 \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΑ GRAM

(i) Έστω $(V,<\,>)$ Χ.Ε.Γ και $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Θέτουμε $\Delta = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & <v_1,v_2> & \dots & <v_1,v_k> \\ <v_2,v_1> & <v_2,v_2> & \dots & <v_2,v_k> \\ \vdots & & & \\ <v_k,v_1> & <v_k,v_2> & \dots & <v_k,v_k> \end{vmatrix}$
Δείξτε ότι $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. ανεξ.

(ii) Έστω $\mathbb{R}^k$ με το συνήθες ε.γ. $e_1, \dots, e_k$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^k$. Ορίζονται $a_{ij} \in \mathbb{R}$ με $v_i = \sum_{j=1} a_{ji} e_j$ και ο $k\times k$ πίνακας $A = [a_{ij}]$. Δείξτε ότι $\Delta = (\det(A))^2$.
(όγκος παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα v_i)